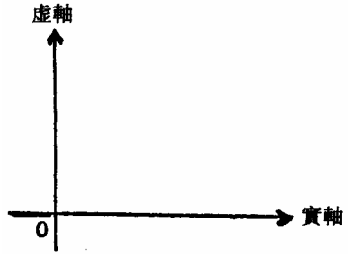
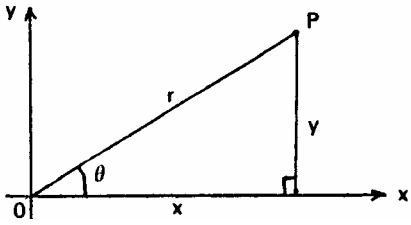
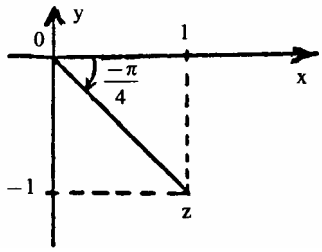
单元 **10**：复数

特定目标：

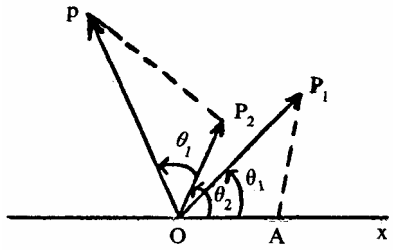
1. 发展复数的概念。
2. 理解复数的标准式及极形式。
3. 理解复数的几何意义。
4. 理解及运用棣美弗定理。

内容	时间分配	教学建议
10.1 复数的标准式	1	由考虑 $x^2+1=0$ 的根，教师可引进单位虚数 $i=\sqrt{-1}$，并可使用例子，如 $x^2+x+1=0$ 介绍虚数的标准式 $a+bi$。实部与虚部应清楚显示。 学生应知道 $a+bi=0$ 当且仅当 $a=b=0$ 透过此定义，教师不难指出两复数的等式 $a+bi=c+di$ 当且仅当 $a=c$ 及 $b=d$。
10.2 复数的加、减、乘及除法运算	2	此处强调运算技巧及在乘法运算时，学生应留意恒等式 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ 及 $i^2=-1$。教师亦应提及复数 $a\pm bi$ 为共轭复数，且互为共轭。 共轭复数的性质(即 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$)可应用于复数的除数，例如，将 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的分子及分母乘以 $c+di$ 的共轭复数，即 $c-di$，可得到 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的标准式。 在此阶段，教师可引人符号 z 代表一复数 $x+yi$ 及 $\overline{Z}$ 代表其共轭复数，即 $\overline{z}=x-yi$。教师可介绍以下性质： (1) 若 z_1 及 z_2 为两复数，则 (i) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

内容	时间分配	教学建议
		(ii) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ 其中 $z_2\neq 0$ (2) 若 $z=p+qi$ 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $\overline{z}=p-qi$ 亦为该方程的根，其中 a，b 及 c 为实数。 (3) 若 $f(x)$ 为一实系数的多项式及 $z=p+qi$ 为方程 $f(x)=0$ 的根，则 $\overline{z}=p-qi$ 亦为方程的根。
10.3 复数的极形式	2	教师可引导学生在阿根图上表示一复数。图中的实轴与虚轴必须注明。  学生应懂得将复数 z 的标准式 $x+yi$ 及极式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 互化。 有关公式如下： $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$ 或 $r=x^2+y^2$， $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 和 θ 的值决于 x 及 y 的符号。 在阿根图上，若点 P 表示复数 z，学生应留意 r 称为 z 的模数，r 可记为 $\lvert z\rvert$ 及是一非负数。 θ称为 z 的辐角及记为 $\arg z$。

内容	时间分配	教学建议
		 教师应清楚指出　　通常不是唯一的，即 $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+2n\pi$ （n = 0，±1，±2，…)。为避免混淆，其主值(即值域在 $-\pi<\theta\le\pi$ 间) 经常被用作去解有关难题。 符号 $r\ \mathrm{cis}\ \theta$ 为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的短式，并可介绍给能力较高的学生。 教师可举出下列例子或给予学生作为练习之用： *例一* 若 $z=2-2i$，则 $\lvert z\rvert=2\sqrt{2}$ 及 $\arg z$ 的主值为 $-\frac{\pi}{4}$。 教师可指出在阿根图上简略注出一点的位置可避免在写模数及辐角时的错误。 

内容	时间分配	教学建议
		例二 试证明 $\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$， $\arg\bar{z}=-\arg z$ 及 $z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$。 用复数及其共轭数去表示模数是很有用处的。教师可强调模数的平方相等于在阿根图上该复数坐标的平方和而不是 $x^2+(iy)^2$。 *例三* 若复数 $z_1=x_1+\bar{v}y_1$ 及 $z_2=x_2+\bar{v}y_2$ 在阿根图上分别以点 P_1 及 P_2 表示，则 P_1 及 P_2 的中点表示 $\frac{z_1+z_2}{2}$。若 P_3 表示 z_1+z_2，则 $OP_1P_2P_3$ 为一平行四边形。 学生应注意向量的加数原理亦可应用于复数。他们可将每一复数与由阿根图上的原点连至代表该复数的点的向量联系。复数的加法和减法在几何上可以向量加法和减法代表。

10.4 复数在极形式的乘法及除法	2	教师可让学生发现两复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 及 $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 的积可以 $r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$ 表示，刚好是模数为 r_1r_2 及幅角为 $\theta_1 + \theta_2$ 的复数的标准式。教师可将结果撮要为： $\lvert z_1z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$ 及 $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$。 学生应能应用此结果至多个极形式复数上，及应看出当一已知复数与 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 相乘时，其模数被 r 相乘，而其幅角则与 θ 相加。在几何上，$z = z_1z_2$ 可在阿根图上说明。其中 O 为原点，A 代表 1 及三角形 OAP_1 与 OP_2P 相似。 

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
10.5 简单轨迹与复数	4	特别地，以 i 乘一复数，结果是将其阿根图的代表向量逆时针旋转一直角，但长度保持不变。 将 z_1 除以 z_2 可由 $z_1 = z_2z$ 或 $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $= r_2r\left[\cos(\theta_2+\theta)+i\sin(\theta_2+\theta)\right]$ 得出 不难看出 $\lvert z\rvert = r = \frac{r_1}{r_2}$ 及 $\arg z = \theta = \theta_1 - \theta_2$ 即 $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ 及 $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$。 *例* 设在阿根图上点 O、A、$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$ 分别代表复数 0、1、z_1、z_2、z_3 及三角形 OZ_2Z_3 与 OZ_1A 相似。试证 $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$。 学生应认识一些简单轨迹。例如： (1) $\lvert z+1\rvert = \lvert z-3\rvert$ 为连接点 $z = -1$ 及 $z = 3$ 的线段的垂直平分线。事实上，教师可提醒学生，将 $z = x + iy$ 代入方程后所得到的 x 与 y 的关系，就是该轨迹的方程。 即 $\lvert x+iy+1\rvert = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$ $(x+1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2$ $2x+1 = -6x+9$ $x = 1$ 学生应看出 $\lvert z+1\rvert = \lvert z-3\rvert$ 可演绎为由 -1 到 z 与由 3 到 z 的距离相等。 (2) $\lvert z - z_1\rvert = 4$ 是一中心为 z_1 及半径 4 单位的圆。 (3) $\lvert z-2\rvert + \lvert z+2\rvert = 6$ 是一焦点在点 2 及 -2 的椭圆。

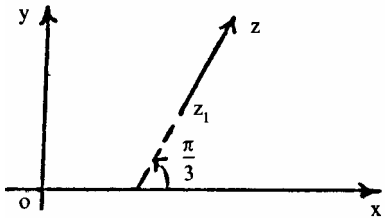
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

(4) $\big||z-5i|-|z+5i|\big|=6$ 是一焦点在点 $5i$ 及 $-5I$ 的双曲线。

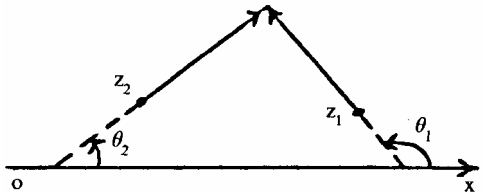
(5) $\arg z=\pi$ 是负实线轴。

(6) $\arg(z-z_1)=\dfrac{\pi}{3}$ 是一由点 z_1 开始及沿方向 $\dfrac{\pi}{3}$ 的射线。

教师应指出向量 $Z-Z_1$ 与实线轴成夹角 $\dfrac{\pi}{3}$，及 Z 不能在通过 Z_1 的线的另外一个方向上，否则向量 $z-z_1$ 的方向将变为 $-\dfrac{2\pi}{3}$。



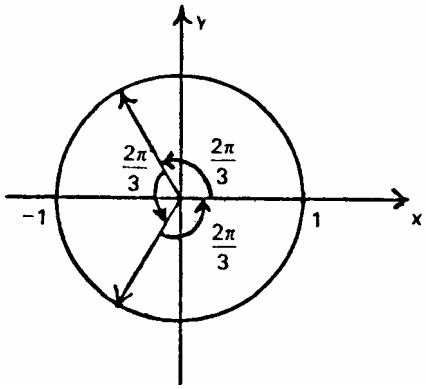
(7) $\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ 可写成 $\arg(z-z_1)-\arg(z-z_2)=\dfrac{\pi}{2}$。



内 容	时间分配	教 学 建 议
10.6 棣美弗定理	3	设 $\arg(z-z_1)=\theta_1$ 及 $\arg(z-z_2)=\theta_2$， $\theta_1-\theta_2=$ 通过 z_1 及通过 z_2 的两线段的夹角。 $\therefore z$ 在以该线段(z_1 及 z_2 为两端点)为直径之半圆上。 教师应引导学生证明 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 其中 n 为正整数。可以应用数学归纳法证明。 *例一* 对 $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$，将右面的式子利用二项式定理展开，学生可由等式两边的实部与虚部相等得 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 及 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ *例二* 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，求证 $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ 从而以倍角表 $\sin^5\theta$。 透过考虑 $(2i\sin\theta)^5=\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^5$，学生应能得到 $2^5 i\sin^5\theta=\left(z^5-\dfrac{1}{z^5}\right)-5\left(z^3-\dfrac{1}{z^3}\right)+10\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$ 或 $\sin^5\theta=\dfrac{1}{16}(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta)$。 学生应认识到恒等式 $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ 及 $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ 对解类似的问题非常有用。 棣美弗定理可推广到 n 为负数及 n 为有理数的一般情形。

内 容	时间分配	教 学 建 议

		当 n 为负整数时，则 $m=-n$ 为一正整数，及 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$ $=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}=\dfrac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$ $=\dfrac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{1}=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$ $=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 证明棣美弗定理成立。 当 n 为一分数时，它可写成为 $\dfrac{p}{q}$ 其中 p 及 q 为整数及 q 为正数。这里要取消 q 次方根。教师应强调对于 $\cos\theta+i\sin\theta$ 有 q 个不同值，而 $\cos\dfrac{p}{q}\theta+i\sin\dfrac{p}{q}\theta$ 是其中一个 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 的值。 推而广之，$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 应为 $\cos\left(\dfrac{p}{q}\theta+\dfrac{2k\pi}{q}\right)+i\sin\left(\dfrac{p}{q}\theta+\dfrac{2k\pi}{q}\right)$ 其中 $k=0$，1，2，…，$q-1$。
10.7 1 的 n 次方根	3	1 的立方根是一有趣例子： $z^3=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$ 其中 $k=0$，1，2 $z=1$ 或 $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$ $=1$ 或 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 若 1，ω，ω^2 为 1 的立方根，它们的性质有： (1) $\omega^3=1$ (2) $1+\omega+\omega^2=0$ (3) $(\omega^2)^2=\omega^4=\omega$，即每一复数根为另一根的平方。
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

		(4) $1=\omega^3=\omega^6=\cdots$，$\omega=\omega^4=\omega^7=\cdots$ 及 $\omega^2=\omega^5=\omega^8=\cdots$ 1 的立方根可以阿根图表示出来。  相似地，1 的 n 次方根是 $\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ 其中 $k=0$，1，2，⋯，$n-1$ 以下数点可作讨论： (1) 给予 k 多一些数值不表示得到多一些根，因为当 $k=n$ 时即辐角为 2π，其根与 $k=0$ 时相同，当 $k=n+1$ 时，又与 $k=1$ 时重迭，余此类推。 (2) 所有根的模数全为 1，它们在阿根图上平均环绕一单位圆，它们的相邻辐角互相相差 $\dfrac{2\pi}{n}$。 (3) 于实轴对称，所以复数根是共轭的。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

		(4) 若 n 为偶数，则 k 的其中一个值是 $\frac{n}{2}$。其时辐角是π，及其对应实根是 $z=-1$。 在此情况，$z^2-1=(z-1)(z+1)$ 为 z^n-1 的二次因式。 (5) 若 n 为奇数，则 $z=1$ 是唯一的实根，而 $z-1$ 是唯一的实数因式。 (6) 任一正实数 a 可写成 $a(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$ 而它的 n 次平方根相对是 $\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$，$k=0$，1，2，⋯，$n-1$，其中 $\sqrt[n]{a}$ 为 a 的 n 次正根。 *例* 32 的 5 次根是 2，$2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ 及 $2\left(\cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$。 学生应能运用棣美弗定理找出一复数的 n 次方根，例如，若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ 其中 $k=0$，1，2，⋯，$n-1$。
	17	