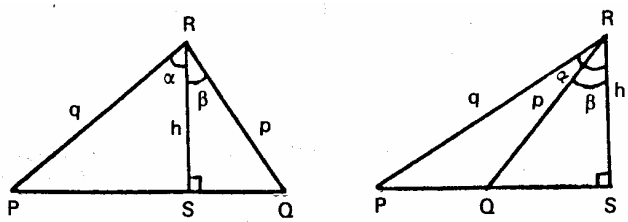
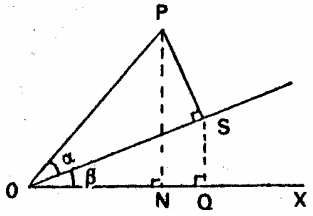
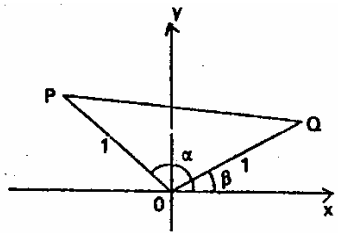
單元 4：三角

特定目標：

1. 理解任意角的六個三角函數及其圖像。
2. 理解及應用複角公式及和積互變公式。
3. 計算三角方程的通解。
4. 掌握解二維及三維空間較難問題的技巧。

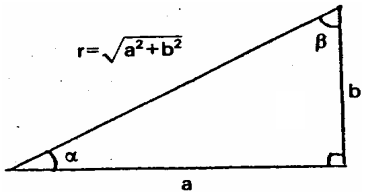
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
4.1 弧度法	2*	學生應已明白弧度的意義。他們應能推導 $s = r\theta$ 及 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 兩條公式和計算弧長及扇形面積。 學生應能掌握角度與弧度的換算。計算三角函數和涉及弧度的公式應有足夠的練習。
4.2 任意角的六個三角函數及其圖形	4* + 4	學生應已熟習正弦、餘弦和正切函數及其在 0 至 2π 區間內的圖像。這些函數的定義域可伸展至實數全集。 學生可發現正弦、餘弦和正切都是周期函數而其周期分別是 2π、2π 和 π。教師可用單位圓來定義餘割、正割和餘切。 學生應知道 $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 及 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

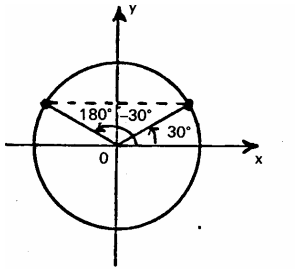
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
4.3 複角	10	教師應指示出如何去化簡角是 $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ (n 是偶數或奇數) 的六個三角函數. 應給予學生涉及關係式和恆等式的分類練習。 相信學生亦可發現餘割、正割和餘切都是周期函數而其周期分別是 2π、2π 和 π。 *例一* 證明恆等式 $\sec^2\theta\ \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$。 *例二* 已知 $\frac{\sin^2\theta}{1+2\cos^2\theta} = \frac{3}{19}$，且 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，試求 $\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$ 的值。 教師可利用下列圖中三角形 PQR 的面積來介紹 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ 的公式： 

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		教師亦可利用線段 OP 在線 OX 的投映來顯示 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$  或應用餘弦公式(如學生已學習此公式)於下圖三角形 OPQ 來顯示 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ 。  學生應注意 $\sin(A \pm B)$及 $\cos(A \pm B)$ 的公式對任意角 A 和 B 都成立。教師應提供足夠例子及練習給學生以使他們熟習這些公式，並可鼓勵學生自己推出下列的公式。 $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 及和差與積互化公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ 其它有關公式亦可推出。 二倍角公式 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$ $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ $\sin^2 A = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2A)$ $\cos^2 A = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2A)$ 三倍角公式 $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$ 半倍角公式 $\sin\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

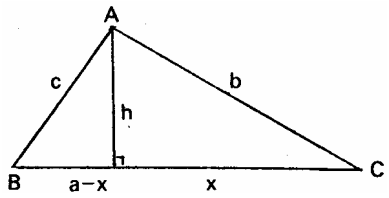
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ $\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ 教師應強調這些公式的應用。下列的例子可加闡釋： *例一* 運用 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$，求證 $\tan\frac{\pi}{8}$ 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的根，從而求出 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的根式值。 *例二* 解方程 $\cos 2x + 2\cos^2\frac{x}{2} = 1$，其中 $0 \le x \le 2\pi$。 *例三* 試以 $\frac{\theta}{2}$ 表示 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$，由此求出 $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 和 $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$，其中 $t = \tan\frac{\theta}{2}$。 由此，解方程 $\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{3 - 5\sin\theta} = 3$，其中 $0° \le \theta \le 180°$。 *例四* 求證 $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = \frac{\sin 8\theta}{2\sin\theta}$，其中 $\sin\theta \ne 0$。

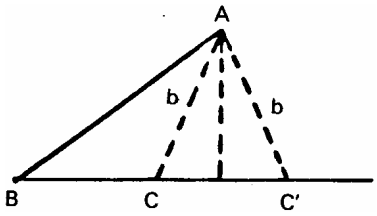
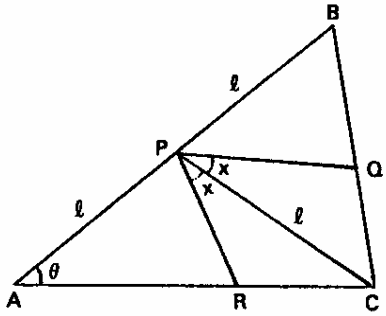
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
4.4 補助角的形式	2	教師可從這例子引導學生先去探究數式 $2\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta)$ 及說明下列三角級數的和亦可用同樣的方法處理 $C = \cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta+2\alpha) + \cdots + \cos(\theta+n\alpha)$ 和 $S = \sin\theta + \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta+2\alpha) + \cdots + \sin(\theta+n\alpha)$ *例五* 解下列方程，其中 $0° \le \theta \le 360°$： (*a*) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$ (*b*) $\cos 3\theta \cos 8\theta + \sin 4\theta \sin 7\theta = 0$ 教師可要求學生將 $r\cos(\theta-\alpha)$化為 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 的形式。然後，學生應不難看出 $a = r\cos\alpha$ 和 $b = r\sin\alpha$。逆算時，數式 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 可寫作 $r\cos(\theta-\alpha)$ 的形式，其中 $r = \sqrt{a^2+b^2}$ 及 $\tan\theta = \frac{b}{a}$。教師可用下面的直角三角形來闡明上述的概念：  教師應補充說明數式 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 亦可利用餘角 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 來寫為 $r\sin(\theta+\beta)$ 的形式。因正弦或餘弦函數的值只是由−1 至 1，學生應不難明白 $-r \le r\cos(\theta-\alpha) \le r$ 及 $-r \le r\sin(\theta+\alpha) \le r$。 教師可和學生討論 $y = a\cos\theta + b\sin\theta$ 圖像的形狀。可介紹類似下列的例子。

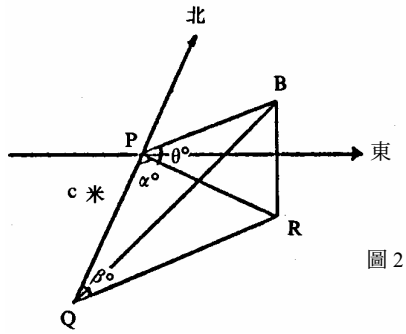
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
4.5 三角方程的通解	4	*例一* (*a*) 若 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ 其中 $r>0$ 和 $0°\le\alpha\le 90°$，試求 r 及 α。 (*b*) 若 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3\sin\theta+\cos\theta+7}}$，利用(*a*)的結果，試求 y 值的值域。 *例二* 設 $f(\theta)=12\sin\theta-5\cos\theta+8$。 (*a*) 試將 $f(\theta)$化為 $r\sin(\theta-\alpha)+c$ 的形式，其中 r，α和 c 是常數及 $0°\le\theta\le 90°$。 (*b*) 利用(*a*)部的結果，或其它方法，試求 $f(\theta)$的最小值。 教師可要求學生列出方程 $\sin\theta=\sin 30°$ 的所有解。學生應知道$\theta=30°$是 θ 的其中一個解，而 $180°-30°$，$360°+30°$，$540°-30°$，…是其他可能的解。 教師應引導學生去結合上述結果為兩組： $\theta=2n(180°)+30°$ 和 $\theta=(2n-1)(180°)-30°$ 及 簡化為單一的公式 $\theta=n\cdot(180°)+(-1)^n(30°)$，其中 n 是整數。 

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		在這階段，學生應不難知道 $\sin\theta=\sin\alpha$ 的通解是 $\theta=n\cdot(180°)+(-1)^n\alpha$。 教師應和學生討論如何求出 $\cos\theta=\cos\alpha$ 的通解和總結 $\theta=n\cdot(360°)\pm\alpha$。 同樣地，$\tan\theta=\tan\alpha$ 的通解是 $\theta=n\cdot 180°+\alpha$。 教師宜將上述三個結果同時以弧度表示。 $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ 若 $\sin\theta=\sin\alpha$ $\theta=2n\pi\pm\alpha$ 若 $\cos\theta=\cos\alpha$ $\theta=n\pi+\alpha$ 若 $\tan\theta=\tan\alpha$ 應提醒學生不要將弧度和度在同一公式中混合使用。他們可用反函數的記法，例如 $\theta=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 來表示。 以下的例子可供參考。 *例一* 試求 $\cos^2 y=\frac{1}{2}$ 的通解。 從原式可得出 $\cos y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 而解是 $y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ 其中 n 是整數。對能力較高的學生，可重新安排答案如下： 對 $y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$， $y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 k 是偶數或零。 對 $y=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$， $y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 k 是奇數。 聯合後，解為 $y=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 n 是整數。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		例二 求 $2\cos\theta = \cot\theta$ 的通解。 學生或會忽略 $\cos\theta = 0$ 是其中一個解。教師應提醒學生不要消去可能是零的因式。 *例三* 求 $\cos 3\theta = \sin\theta$ 的通解。 可用正弦或餘弦的方法來解。用正弦的方法，可得 $\theta = 180°n + (-1)^n(90° - 3\theta)$ 及用餘弦的方法，可得 $3\theta = 360°n \pm (90° - \theta)$ 。故利用餘弦的公式較易處理。 *例四* 求 $\sin 2x + \sin 4x = \cos x$ 的通解。 可利用恆等式 $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ ， 將方程寫為 $2\sin 3x\cos x = \cos x$ 的形式。 *例五* 求 $2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} = 1$ 的通解。 可利用恆等式 $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 可[redacted]解這方程。 *例六* 求 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$ 的通解。 解方程時，學生可先將 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ 化為 $r\sin(\theta+\alpha)$ 或 $r\cos(\theta-\alpha)$ 的形式。
4.6 三角形的解法	10*	有關解三角形的數學問題需要應用正弦和餘弦公式。對一任意銳角三角形 ABC，學生應不難利用下圖，推導出 $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 和 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		 這些公式可伸延及應用於任意三角形，包括鈍角三角形。其次，正弦公式亦可由一個任意三角形及其外接圓推導出來。至於餘弦公式，除了運用畢氏定理外，亦可從下列三恆等式中推出。 $a = b\cos C + c\cos B$ $b = a\cos C + c\cos A$ $c = b\cos A + a\cos B$ 在這情況下，學生應注意畢氏定理是餘弦公式的特殊情況。 應提供學生足夠的例子及習作。解三角形的習作亦應包括下列的情況： （1）任意兩個角和一條邊 （2）任意兩條邊及其中一邊的對角 （3）任意兩條邊及其夾角 （4）任意三條邊 學生應能選擇及應用適合的公式。教師亦應利用例子詳加解釋兩義情況。下圖對此會有幫助。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		 c>b>csinB
4.7 二維及三維空間問題	4	教師應介紹較艱深的問題，包括有關複角及任意三角比的問題。 應鼓勵學生在解問題前，先描繪有關圖形。金屬線模型或立體模型對解釋及說明會有幫助。 足夠的例子及練習可幫助學生掌握解有關問題的技巧。 *例一* 在下圖，ABC 是一三角形而 $\angle A = \theta$。P 是在 AB 的點而 PA = PB = PC = ℓ。R 及 Q 是分別在 AC 及 BC 的點，而 $\angle QPC = \angle RPC = x$。 

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(*a*) 試證 $PR = \dfrac{\ell \sin\theta}{\sin(x+\theta)}$。 (*b*) 試以 θ 表 ∠PCQ 並由此以 ℓ、x、θ 表 PQ。 (*c*) 試證 ΔPQR 的面積為 $\dfrac{\ell^2 \sin\theta\cos\theta\sin 2x}{2\sin(x+\theta)\cos(x-\theta)}$，且該面積可表示成 $\dfrac{\ell^2 \sin 2\theta}{2}\left(1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 2x+\sin 2\theta}\right)$。 ..... (*) (*d*) (i) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$，求 x 值的可能範圍。由此，利用(*)推出 ΔPQR 的極大面積，並以 ℓ 表之。 (ii) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$，x 值的可能範圍為何？ 試以 ℓ 表 ΔPQR 的極大面積。 *例二*  圖 2

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		一汽球 B 由平地上兩點 P、Q 同時觀察，P 在 Q 的北面及相距 c 米。從 P 及 Q 兩點測得汽球的方位角分別為 Sα°E 及 Nβ°E。從 P 點測得 B 的仰角為 θ°。R 是 B 點在地上的投影(見圖)。 (*a*) 試證當汽球在高度 h 米時， $h = \dfrac{c\tan\theta^\circ \sin\beta^\circ}{\sin(\alpha^\circ + \beta^\circ)}$ 。 (*b*) 已知 $\theta = 40$，$\alpha = 54$ 及$\beta = 46$， (i) 試求從 θ 點測得 B 的仰角 ； (ii) 設 M 是 PQ 的中點，試求從 M 點測得 B 的仰角和方位角。
	16*+24	